Краткое содержание монографии

Цыбульский О. А. Основы проективной теории измерений: монография / О. А. Цыбульский. – Димитровград : ДИТИ НИЯУ МИФИ, 2022. – 156 с. – ISBN 978-5-6045061-3-4.

Монография посвящена развитию теории измерений в граничных областях ее применения, в которых применение линейной модели измерений становится не эффективным. Это параметрические и широкодиапазонные измерения, в которых погрешностью нелинейности характеристики преобразования уже нельзя пренебречь. Ее надо либо корректировать, либо учитывать в модели измерения.

Эту задачу решает проективная теория измерений, в которой измерительное преобразование рассматривается как проективное преобразование. В результате, сохраняя применение линейных измерительных преобразователей, модель проективного преобразования учитывает нелинейность характеристики, как неотемлемое свойство преобразования.

Обобщенное уравнение проективного измерения включает линейные, параметрические и проективные преобразования в качестве частных случаев. Предложена формула, нормирующая предельную погрешность проективного измерения.

Получены инварианты проективного измерения, применяемые для повышения точности измерения. Также получены критерии для оценки эффективности измерения и сравнения приборов, независимо от их полос предельной погрешности и числа поддиапазонов.

Монография предназначена для специалистов по измерительной технике, приборостроению, а также, для студентов соответствующих специальностей.

Монографию в электронном виде можно заказать по E-mail:**multimer@list.ru**

Рост диапазона измерений заметная тенденция в приборостроении. Например, в расходометрии за истекшие четверть века динамический диапазон вырос от 1:50 до 1:1000, соответственно, изменилась и типовая полоса предельной погрешности расходомеров. Предельная погрешность расходомеров нормируется в 2-3 поддиапазонах. Причем, переходные между поддиапазонами расходы устанавливаются достаточно произвольно. При таком нормировании сложно осуществить правильное сравнение метрологических характеристик приборов.

Однако, стандарты нормирования полосы предельной погрешности, основанные на линейной модели изменения абсолютной погрешности по диапазону измерения, остались неизменными с середины прошлого века.

Формула нормирования предельной погрешности состоит из двух составляющих предельной погрешности: аддитивной и мультипликативной. Ее возможности ограничены при нормировании широкодиапазонных приборов, о также приборов с параметрическим преобразованием, например, измерительных мостов, функция преобразования которых описывается дробно-линейной зависимостью. Для параметрических преобразователей еще в середине прошлого века В.О. Арутюновым и П.В. Новицким предлагалась формула нормирования полосы предельной погрешности, состоящая из трех составляющих. Эта формула в общем виде записывается как

$$\delta X = \delta_{\text{а}} X_{\text{н}} / X + \delta_{\text{м}} + \delta_{\text{г}} X / X_{\text{в}}$$

где $X_{\text{н}}, X_{\text{в}}$ – нижняя и верхняя границы диапазона измерения;

$\delta_{\text{м}}$ – мультипликативная составляющая относительной погрешности;

$\delta_{\text{а}} = \Delta_a / X_{\text{н}}$ – составляющая относительной погрешности, определяемая аддитивной погрешностью преобразования $\Delta_{\text{а}}$ при $X = X_{\text{н}}$;

$\delta_{\text{г}} = \Delta_{\text{г}} / X_{\text{в}}$ – составляющая относительной погрешности, определяемая погрешностью нелинейности $\Delta_{\text{г}}$ при $X = X_{\text{в}}$.

Приведенной формулы достаточно для нормирования без поддиапазонов полосы предельной погрешности приборов.

Многопредельность широкодиапазонных цифровых приборов имеет еще одну причину. Предельная погрешность цифрового прибора состоит из двух составляющих: погрешности квантования и суммы остальных погрешностей прибора.

Если сумма остальных погрешностей прибора описывается трехчленной формулой, то и погрешность квантования, задаваемая шкалой аналого-цифрового преобразователя (АЦП), должна иметь подобную зависимость. Это условие минимизации разрядности применяемого АЦП. Однако, этому условию не удовлетворяют линейные АЦП с постоянной абсолютной погрешностью квантования. Их относительная погрешность квантования растет обратно пропорционально изменению измеряемой величины и никак не соответствует полосе погрешности, определяемой суммой остальных погрешностей прибора.

Применяемое в теории измерений уравнение измерения является линейной функцией преобразования. Как правило, линейны и элементы и блоки, на основе которых строится прибор. Линейна и шкала квантования АЦП в приборе. Но полоса погрешности широкодиапазонных приборов и приборов с параметрическим преобразованием не описывается линейной функцией с аддитивной и мультипликативной составляющими, а требует дополнительной нелинейной составляющей. Нелинейная составляющая является неотемлемой частью погрешности параметрических преобразований, поскольку их характеристика преобразования описывается дробно-линейной функцией. Несмотря на то, что они построены на линейных элементах, они осуществляют дробно-линейное преобразование. В математике дробно-линейное преобразование изучается проективной геометрией и является проективным преобразованием. Працтивные преобразования образуют группу, т.е. последовательность нескольких проективных преобразований описывается также дробно-линейной функцией. В измерительных приборах, как правило, осуществляется последовательность преобразований. Если в цепочке линейных измерительных преобразователей прибора присутствует хотя бы один дробно-линейный преобразователь, то результирующая функция преобразований будет дробно-линейной, т.е проективной. А значит, полоса погрешности этого прибора должна нормироваться формулой с тремя составляющими предельной погрешности.

Поскольку понятие «проективный», более общее и емкое, чем понятия «дробно-линейный» и «параметрический», далее будем предпочтительно применять к этим преобразованиям термин «проективные» преобразования, не исключая применение терминов «дробно-линейный» и «параметрический», если это необходимо.

Каждому виду полосы предельной погрешности соответствует свое уравнение измерения. Полосе, нормируемой двухчленной формулой с аддитивной и мультипликативной соствляющими, соответствует линейное уравнение измерения. Полосе, нормируемой трехчленной формулой, соответствует проективное уравнение измерения, характеристика преобразования которого описывается дробно-линейной функцией. Графиком дробно-линейной функции является равносторонняя гипербола. Поэтому нелинейная составляющая в трехчленной формуле предельной погрешности имеет гиперболический характер и называется «гиперболической».

Проективное уравнение измерения позволяет согласовать полосу погрешности квантования прибора с полосой, нормируемой трехчленной формулой, включающей аддитивную, мультипликативную и гиперболическую составляющие. Уравнение измерения имеет дробно-линейный вид

$$a_0 X_{оп} + a_1 X = (b_0 X_{оп} + b_1 X)K$$

где $a_0,\ a_0,\ b_0,\ b_1$ – постоянные масштабные коэффициенты; X, $X_{оп}$ – измеряемая и опорная величины; K – выходной код АЦП.

В линейном уравнении измерения осуществляется сравнение измеряемой величины X с мерой $X_{оп}$. В дробно-линейном уравнении измерения осуществляется сравнение линейной комбинации $(a_0 X_{оп} + a_1 X)$ с линейной комбинацией $(b_0 X_{оп} + b_1 X)$ меры и измеряемой величины. При значении a_0=0, b_1=0 уравнение дробно-линейного измерения станет линейным. Но при $b_1 \neq 0$ измерительное преобразование получает дополнительную степень свободы, позволяющую разработчику усилить важное и необходимое свойство преобразования за счет менее важных или избыточных свойств.

Проективное уравнение измерения, обобщающее линейное уравнение, позволило обобщить и структуру прямых методов измерения.

В соответствии с классификацией П.П. Орнатского, совокупность методов прямых измерений подразделяется на две группы. В первую, наиболее широкую группу методов прямых измерений входят все методы, в которых на опорном входе устройства сравнения варьируется величина, воспроизводимая мерой, однозначной или многозначной.

Во второй группе методов на измерительном входе устройства сравнения варьируется значение измеряемой величины, преобразуемое управляемым масштабным преобразователем, одноканальным или многоканальным.

В структурной схеме проективного измерения на входы устройства сравнения поступают линейные комбинации измеряемого и опорного сигналов.

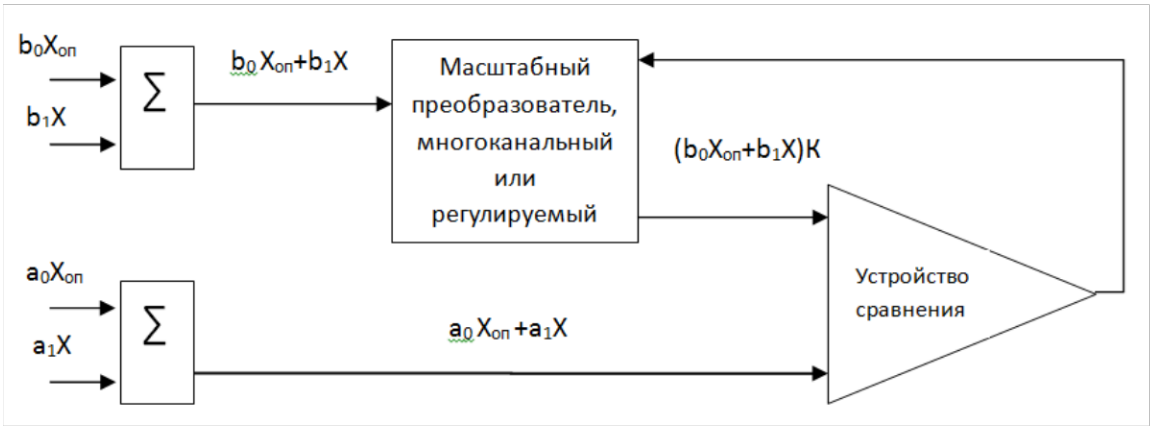

Рис.1 Обобщённая структурная схема дробно-линейного аналого-цифрового преобразования

Сигнал на опорном входе устройства сравнения варьируется масштабным преобразователем, многоканальным или управляемым одноканальном. Метод проективного измерения обеспечивает возможность задания любой гиперболической шкалы, от шкалы первой группы до шкалы второй группы методов измерений. Но при этом добавляет новые эффективные возможности для улучшения параметров измерения. Метод проективного измерения позволяет целенаправленно трансформировать шкалу квантования прибора.

Например, получить с помощью АЦП с линейной шкалой, шкалу с «квазипостоянной» относительной погрешностью.

Для согласования погрешности квантования с полосой предельной погрешности, соответствующей трехчленной формуле нормирования, предложен метод трансформации шкалы аналого-цифрового преобразования. На основе этого метода получены уравнения измерения, полоса погрешности квантования которых пропорциональна полосе предельной погрешности прибора. При этом, в зависимости от соотношения составляющих трехчленной формулы, в качестве квантователя должны применяться либо АЦП с постоянной относительной погрешностью квантования (экспоненциальные), либо линейные АЦП с постоянной абсолютной погрешностью квантования.

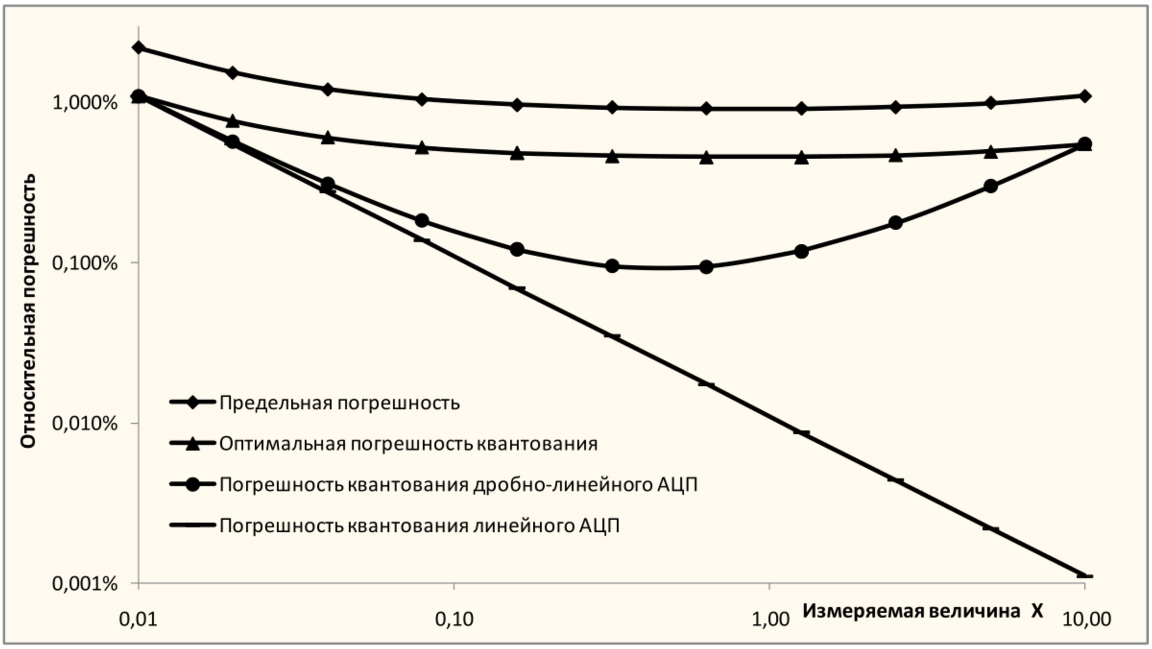

Рис.2 Сравнение полос относительной погрешности квантования при безизбыточном, дробно-линейном и линейном квантовании

Линейные АЦП имеют лучшие технико-экономические характеристики, чем экспоненциальные АЦП. Применение проективного уравнения измерений с АЦП, имеющем линейную шкалу квантования, взамен АЦП с экспоненциальной шкалой, позволяет объединить в приборе преимущества экспоненциальных (мультипликативных) преобразователей (широкий диапазон, малая разрядность) с достоинствами линейных (высокая точность, быстродействие, технологичность, низкая цена).

Другое применение обусловлено особенностью характеристики проективного уравнения измерения. В зависимости от значений постоянных масштабных коэффициентов уравнения измерения в качестве характеристики АЦ преобразования может быть задана любая часть из четырех ветвей равносторонней гиперболы. Это позволяет:

- с высокой точностью осуществлять компрессию широкодиапазонных сигналов;
- с высокой точностью осуществлять параметрические измерения без дополнительной погрешности нелинейности;
- построить АЦ преобразование с заданной нелинейностью характеристики.

В монографии рассмотрена модель измерений, как проективного преобразования. Впервые аналогию между проективным и измерительным преобразованием отметил и применил в своих работах по параметрическим измерительным преобразованиям В.Д. Мазин. Предложенный им метод сложного отношения (МСО) позволяет повысить точность параметрических преобразователей, используя фундаментальное соотношение проективной геометрии – постоянство сложного отношения четырех произвольных точек измерительной шкалы при их проективном измерительном преобразовании.

Проективная модель измерений позволила сформулировать обобщенное уравнение проективных измерений, включающее линейные и параметрические измерения в качестве частных случаев, которые определяются расположением центра проекции при измерении.

На основе обобщенного уравнения измерений получен проективный инвариант преобразования, учитывающий метрологическую специфику измерений. При проективном преобразовании нормированной измеряемой величины $\bar{X}$ в нормированное значение выходного кода $\bar{K}$ инвариантно отношение

$$\frac{\delta \bar{X}}{\bar{X}} = \frac{\delta \bar{K}}{\bar{K}}$$

С помощью инварианта получены соотношения между основными метрологическими параметрами проективных измерений: граничными значениями $\bar{X}$ и $\bar{K}$, значениями погрешности в граничных значениях диапазона измерения, нелинейностью гиперболической функции преобразования S.

Для повышения точности проективного измерения эффективно применим метод сложного отношения. В 80-х годах структурным методам повышения точности измерительных устройств посвящали свои работы Алиев Т.М., Бромберг Э.М., Куликовский К.Л., Земельман М.А. и др. Одним из широко применяемых структурных методов являются метод образцовых (тестовых) сигналов, к которым относится метод сложного отношения. Структурные методы позволяют скорректировать аддитивную и мультипликативную составляющие систематической погрешности. Но для коррекции нелинейности характеристики преобразования применялись только итерационные методы.

Метод сложного отношения обеспечивает коррекцию аддитивной, мультипликативной и гиперболической составляющих систематической погрешности приборов. Приведены примеры применения, подтверждающие эффективность метода.

Фундаментальные свойства инварианта сложного отношения позволили сформулировать на его основе характеристику проективных преобразователей, также имеющую инвариантный характер. Это коэффициент нелинейности S. На основе этого инварианта получено обобщенное уравнение проективного измерения, предложено определение нелинейности характеристики преобразования проективных измерительных приборов и определена связь нелинейности с параметрами измерительного проективного преобразования, усовершенствован метод сложного отношения.

Для применения МСО необходимы три тестовых сигнала. Применение коэффициента нелинейности S позволяет скорректировать систематическую погрешность проективного измерения, включая нелинейную составляющую, на основе только двух тестовых измерений.

Проективные измерения более эффективны, чем линейные, но на сколько? Для получения количественных оценок применены критерии эффективности шкалы квантования, а также, расширенный критерий для обобщенной оценки прибора по точности и диапазону.

Критерий для обобщенной оценки прибора по точности и диапазону измерения впервые применен работах Ф.Е. Темникова и П.В. Новицкого. Критерий получен для приборов, предельная погрешность которых нормируется двухчленной формулой.

В монографии предложено расширенное выражение критерия для трехчленной формулы нормирования, включающей аддитивную, мультипликативную и гиперболическую составляющие предельной погрешности. Критерий связывает между собой основные параметры измерительного прибора: динамический (относительный) диапазон измерений, мультипликативную составляющую относительной погрешности, относительные погрешности в граничных точках диапазона измерения с числом эффективных квантов измерительной шкалы прибора. Он позволяет сравнивать метрологические характеристики однотипных приборов независимо от их динамических диапазонов измерения, граничных значений диапазона измерения, числа поддиапазонов, предельной погрешности измерения в диапазоне измерения.

На основе критерия получены формулы усредненных в диапазоне измерения абсолютной, приведенной и относительной погрешностей, которые дают обобщенную оценку точности сравниваемых приборов во всем диапазоне измерения.

В заключительной главе приведены основные результаты, полученные в работе, и рассмотрены возможности их применения. Также, в Приложении приведена сравнительная таблица формул линейного и проективного измерений. В таблице показано, что каждый параметр линейного измерения является частным случаем параметра проективного измерения. Проективное измерение, по сравнению с линейным, позволяет достич лучшего результата измерения, благодаря дополнительной степени «свободы» при формировании характеристики преобразования.

Заключение

Применение двухчленной формулы нормирования предельной погрешности, соответствующей линейной модели измерения, не эффективно при нормировании приборов, в которых погрешностью, вызванной нелинейностью функции преобразования, уже нельзя пренебречь. К таким приборам относятся широкодиапазонные линейные приборы, а также, приборы с параметрическим преобразованием, функция преобразования которых описывается дробно-линейной зависимостью. Их нелинейность необходимо учитывать в модели измерения. Проективная модель измерения полностью учитывает характеристику параметрических измерительных приборов и преобразователей, а также, хорошо соответствует характеристике преобразования широкодиапазонннных приборов. Характерные свойства проективной модели измерения, учитывающей гиперболическую нелинейность функции преобразования, следующие:

- В проективной модели измерения необходимо применять для нормирования полосы предельной погрешности трехчленную формулу, вместо двухчленной формулы, применяемой в линейной модели измерения

$$\delta X = \delta_{\text{а}} X_{\text{н}} / X + \delta_{\text{м}} + \delta_{\text{г}} X / X_{\text{в}}$$

Трехчленная формула точней нормирует полосу предельной погрешности измерений и позволяет исключить введение поддиапазонов.

Каждому виду изменения полосы предельной относительной погрешности соответствует свое уравнение измерения. Трехчленная формула соответствует полосе предельной погрешности параметрических преобразователей и, в общем случае, погрешности проективных измерительных преобразователей с уравнением проективного измерения

$$aX = (X_{\text{м}} + nbX)K \text{ ,} \qquad \text{где n=\{–1,0,1\}, b>0}$$

- В проективном измерении значение опорной величины является линейной комбинацией измеряемой величины и величины, воспроизводимой мерой. Это не противоречит нормативным определениям. Наоборот, дополнительная степень «свободы» в формировании опорной величины расширяет возможности проведения качественного измерения.

- Проективное уравнение измерения обобщает линейные уравнения измерений обоих групп методов прямых измерений, соответствующих классификации Орнатского П. П. и включает их в качестве частных случаев. Чтобы от линейного измерения перейти к проективному достаточно сформировать сигнал на опорном входе АЦП в виде суммы сигнала меры и измеряемого сигнала. Придать необходимые свойства этому измерению позволяют соотношения коэффициентов проективного уравнения.

- Проективное уравнение измерения позволяет согласовать полосу погрешности квантования с полосой предельной погрешности прибора, описываемой трехчленной формулой, т.е. позволяет минимизировать разрядность применяемого АЦП без ухудшения точности измерения. А также позволяет на основе линейного АЦП получить шкалу измерения с «квазипостоянной» относительной погрешностью, которая незначительно отличается по эффективности квантования от логарифмической шкалы с постоянной относительной погрешностью.

- Проективные АЦП более эффективно, чем линейные АЦП, решают задачи оптимизации погрешности квантования, расширения диапазона измерения, снижения разрядности АЦП, линеаризации и т.д., сохраняя высокие технико-экономические характеристики используемого линейного АЦП.

- Количественную оценку эффективности проективных измерений дают критерии эффективного квантования $N_{\text{эф}}$ и средней приведенной к диапазону измерения предельной погрешности измерения $\gamma_{\text{ср}}$.

$$N_{эф} = \frac{1}{2\delta_м} \ln\left(\frac{D \cdot \delta_м^2}{\delta X_н \cdot \delta X_в}\right)$$

Критерии дают однозначную оценку точности сравниваемых приборов, независимо от различий их полос предельной погрешности, ширины и количества поддиапазонов измерения.

- Связь между средними значениями по диапазону измерения абсолютной $\Delta X_{ср}$, относительной $\delta_{ср}$, приведенной $\gamma_{ср}$ погрешностей и числом эффективных квантов $N_{эф}$ определяется выражением

$$\pm\gamma_{ср}\% = \pm\frac{\Delta X_{ср}}{X_в - X_н}100\% = \pm\frac{\delta_{ср}\%}{\ln X_в - \ln X_н} = \pm\frac{1}{2N_{эф}}100\%$$

- Обобщенное уравнение проективного измерения, выраженное через нормированные переменные, включает все возможные виды линейных и дробно-линейных уравнений измерения, характеристика преобразования которых лежит в I квадранте

$$\bar{X} = (1 + n\bar{X})\bar{K} \quad ,$$

где n={–1,0,1}, $\bar{X} = \frac{b}{X_м} X$, $\bar{K} = \frac{b}{a} K$

Всем возможным уравнениям измерения соответствуют три ветви характеристики при n ={–1,0,1}, рисунок 3.

- Параметрические преобразования, функция преобразования которых приведена в теореме вариации параметра линейного многополюсника, являются частным случаем обобщенного уравнения проективного преобразования при n=1. Соответственно, параметрические измерения являются частным случаем проективных измерений.

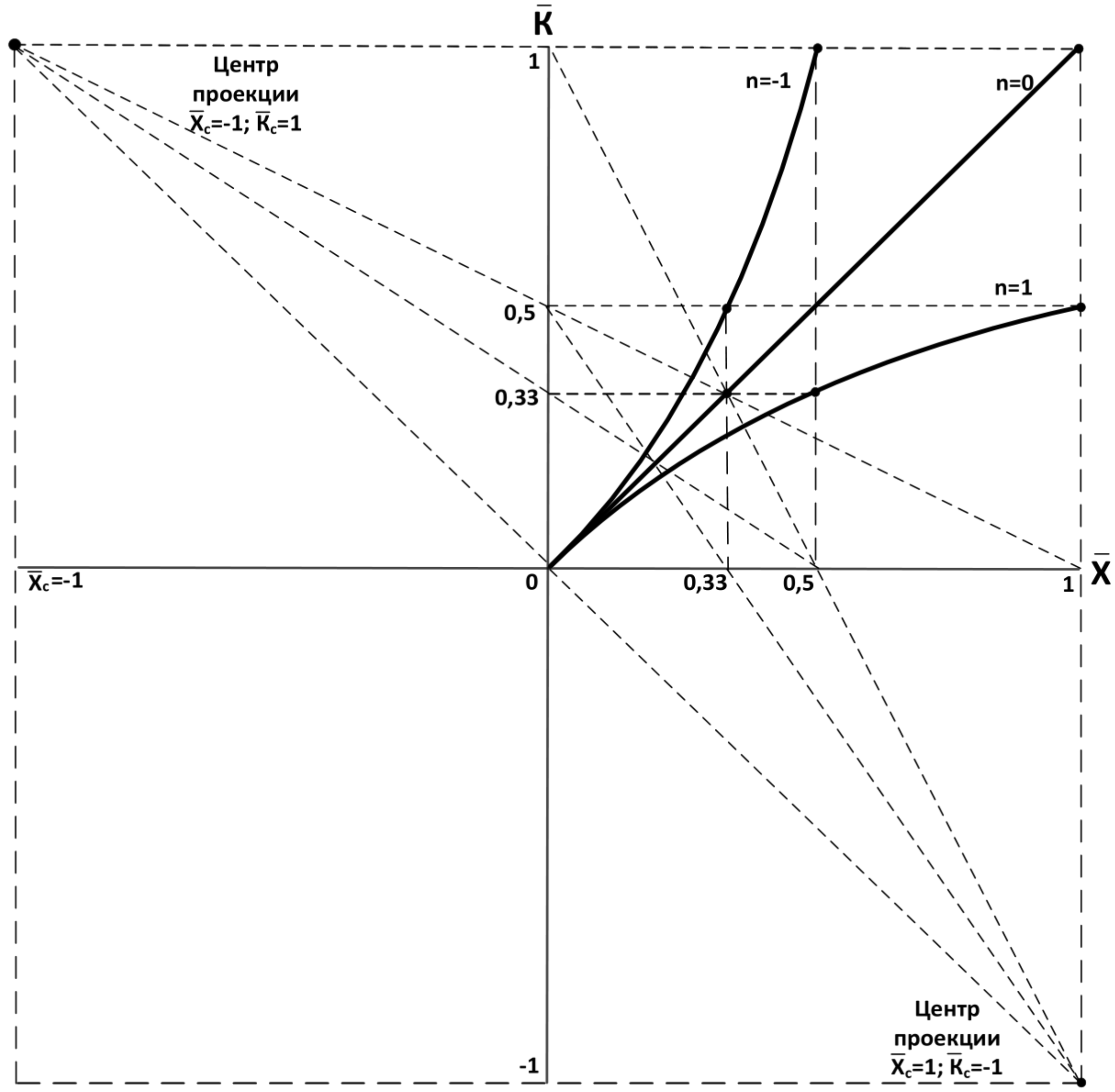

Рис.3 Три типа обобщенного измерительного преобразования, построенного на основе линейных преобразователей при n={–1,0,1} в границах изменения

$$|\bar{X}| < 1 \quad |\bar{К}| < 1$$

- Обобщенное уравнение проективного измерения, выраженное через центр проекции, имеет вид

$$(X_c - X)(K_c - K) = X_c K_c \ ,$$

где центр проекции С (Хс, Кс) $\quad X_с = -\dfrac{X_м}{nb}, \quad К_с = \dfrac{a}{nb}$

- Метрологический анализ проективного измерительного преобразования позволил сформулировать, дополнительно к инварианту сложного отношения, два инварианта проективного измерения:

- Инвариант нормированного измерительного преобразования.

$$\frac{\delta \bar{X}}{\bar{X}} = \frac{\delta \bar{K}}{\bar{K}}$$

Это соотношение означает, что при проективном измерении можно изменять погрешность $\bar{X}$ по сравнению с погрешностью $\bar{K}$ с помощью изменения отношения $\bar{K} / \bar{X}$ или, что аналогично, задавая отношение динамических диапазонов $D_к$ / $D_{х.}$

- Инвариант измерительного преобразователя или коэффициент нелинейности проективного преобразователя S

$$S = \frac{X_c - X_н}{X_c - X_в} = \frac{K_c - K_в}{K_c - K_н}$$

Задавая границы диапазона измерения и центр проекции, мы задаем характеристику преобразования, которая связана с метрологическими параметрами проективного измерения соотношением

$$S = \frac{D_K}{D_X} = \frac{X_н K_в}{X_в K_н} = \frac{\delta X_н \delta K_в}{\delta X_в \delta K_н} = \sqrt{\frac{\Delta X_н \Delta K_в}{\Delta X_в \Delta K_н}}$$

- Обобщенное уравнение измерения линейного и проективного измерений, выраженое через инвариант измерительного преобразователя S, имеет вид

$$\frac{X - X_н}{X - X_в} = S \frac{K - K_н}{K - K_в}$$

При S=1 получим линейное уравнение измерения, являющееся уравнением прямой, проходящей через три точки.

При n= 1 значение S < 1, при n= –1 значение S > 1. Чем больше значение коэффициента S отличается от 1, тем больше нелинейность гиперболической функции преобразования в отличие от линейного преобразования.

Коэффициент S является характеристикой проективного измерительного преобразователя, численно отражающей интегральную нелинейность функции преобразования в диапазоне измерения.

- Для повышения точности проективного измерения целесообразно применять автоматическую коррекцию систематической погрешности измерения приборов, основанную на методе сложного отношения и полученных инвариантах проективного измерения.

Предложенная коррекция систематической погрешности проективного измерения с применением коэффициента нелинейности S позволяет снизить необходимое число тестовых сигналов до двух, благодаря использованию априорной информации о свойстве проективного измерительного преобразователя.

Так же, как и коррекция методом сложного отношения, коррекция, использующая коэффициент S, позволяет рассматривать измерительный тракт прибора от входного сигнала до выходного кода, как «черный ящик», осуществляющий проективное измерительное преобразование с коэффициентом нелинейности S. В результате применения этого метода можно значительно снизить требования к точности и стабильности комплектующих элементов измерительного тракта прибора.

Результирующая предельная относительная погрешность измерения задается погрешностью опорных сигналов Хн, Хв, и коэффициента S.

Соотношения параметров линейного и проективного измерений приведены в сводной таблице ПРИЛОЖЕНИЯ. Из таблицы следует, что все параметры и инварианты линейного измерения являются частным случаем параметров и инвариантов проективного измерения.

Приложение

Сводная таблица соотношений параметров линейного и проективного измерений

<table>
<tr><th>Линейное измерение
(Параллельная проекция)</th><th>Проективное измерение
(Центральная проекция)</th></tr>
<tr><td colspan="2">Нормирование предельной относительной погрешности</td></tr>
<tr><td>$\delta X = \delta_{а} X_{н}/X + \delta_{м}$
$\delta_{А}, \delta_{М}$ – аддитивная и мультипликативная составляющие</td><td>$\delta X = \delta_{а} X_{н}/X + \delta_{м} + \delta_{г} X/X_{в}$
$\delta_{г}$ – нелинейная (гиперболическая) составляющая, $X_{Н}$, $X_{В}$ – нижняя и верхняя границы диапазона измерения</td></tr>
<tr><td colspan="2">Уравнения измерения</td></tr>
<tr><td>$X = X_{м} K$
К – выходной код линейной шкалы,
$X_{м}$ – значение, воспроизведенное мерой</td><td>$aX = (X_{м} + bX)K$
a, b – постоянные коэффициенты</td></tr>
<tr><td colspan="2">Абсолютная погрешность квантования</td></tr>
<tr><td>$\Delta X = const$ – цена деления линейной шкалы</td><td>$\Delta X_{к} = \Delta X \left[\frac{(X_{м} + bX)^2}{(X_{м} + bX_{в})(X_{м} + bX_{н})} \right]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Число квантов шкалы измерений N</td></tr>
<tr><td>$N = \frac{D-1}{\delta X_{Н}}$,
$D = \frac{X_{В}}{X_{Н}}$ – динамический диапазон</td><td>$N = \frac{D-1}{\sqrt{D \cdot \delta X_{В} \cdot \delta X_{Н}}}$
$\delta X_{Н}, \delta X_{В}$ – относительные погрешности квантования в нижней и верхней границах диапазона измерения</td></tr>
<tr><td colspan="2">Отношение сигнал-шум квантования SNR</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{SNR} = 20\lg(2^n) + 1,76$</td><td>$\mathrm{SNR} = 20\lg(2^{2n} \delta X_{В} + 2) + 1,76$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Критерий эффективного квантования $N_{эф}$</td></tr>
<tr><td>$N_{эф} = \frac{1}{2\delta X_{В}} \ln\left(D \frac{\delta X_{В}}{\delta X_{Н}} \right)$</td><td>$N_{эф} = \frac{1}{2\delta_{м}} \ln\left(D \frac{\delta_{м}^2}{\delta X_{Н} \cdot \delta X_{В}} \right)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Связь между средними значениями по диапазону измерения абсолютной, относительной, приведенной погрешностей и числом эффективных квантов.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$\pm\gamma_{ср}\% = \pm \frac{\Delta X_{ср}}{X_{в} - X_{н}} 100\% = \pm \frac{\delta_{ср}\%}{\ln X_{в} - \ln X_{н}} = \pm \frac{1}{2N_{эф}} 100\%$$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Линейное измерение
(Параллельная проекция)</td><td>Проективное измерение
(Центральная проекция)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Обобщенное уравнение проективного измерения</td></tr>
<tr><td colspan="2">$aX = (X_{\text{м}} + nbX)K$, где n={–1,0,1}, b>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Обобщенное уравнение проективного измерения, выраженное
через центр проекции (Xc, Кс)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$(X_c - X)(K_c - K) = X_c K_c$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Обобщенное нормированное уравнение линейного и проективного измерения</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\bar{X} = (1 + n\bar{X})\bar{K}$, где n={–1,0,1}, $\bar{X} = \frac{b}{X_{\text{м}}}X$, $\bar{K} = \frac{b}{a}K$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Инвариант нормированного измерительного преобразования</td></tr>
<tr><td>$\delta\bar{X} = \delta\bar{K}$
Относительные погрешности нормированных переменных $\bar{X}$ и $\bar{K}$</td><td>$\frac{\delta\bar{X}}{\bar{X}} = \frac{\delta\bar{K}}{\bar{K}}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Инвариант простого и сложного отношений</td></tr>
<tr><td>$\frac{(X - X_2)}{(X - X_1)} = \frac{(K - K_2)}{(K - K_1)} = V$
постоянство простого отношение</td><td>$\frac{(X_3 - X_1)}{(X_3 - X_2)} \cdot \frac{(X - X_2)}{(X - X_1)} = \frac{(K_3 - K_1)}{(K_3 - K_2)} \cdot \frac{(K - K_2)}{(K - K_1)} = W$
постоянство сложного отношения</td></tr>
<tr><td colspan="2">Коррекция систематической погрешности на основе инвариантов</td></tr>
<tr><td>$X = \frac{X_2 - VX_1}{1 - V}$, $\delta V = 0$</td><td>$X = \frac{X_2 \cdot (X_3 - X_1) - W \cdot X_1 \cdot (X_3 - X_2)}{(X_3 - X_1) - W \cdot (X_3 - X_2)}$, $\delta W = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Инвариант проективного измерительного преобразователя
Коэффициент нелинейности S проективного измерительного преобразователя</td></tr>
<tr><td>S=1</td><td>$S = \frac{X_c - X_{\text{н}}}{X_c - X_{\text{в}}} = \frac{K_c - K_{\text{в}}}{K_c - K_{\text{н}}}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$S = \frac{D_K}{D_X} = \frac{X_{\text{н}} K_{\text{в}}}{X_{\text{в}} K_{\text{н}}} = \frac{\delta X_{\text{н}} \delta K_{\text{в}}}{\delta X_{\text{в}} \delta K_{\text{н}}} = \sqrt{\frac{\Delta X_{\text{н}} \Delta K_{\text{в}}}{\Delta X_{\text{в}} \Delta K_{\text{н}}}}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Уравнения измерения линейного и проективного измерений</td></tr>
<tr><td>$\frac{X - X_{\text{н}}}{X - X_{\text{в}}} = \frac{K - K_{\text{н}}}{K - K_{\text{в}}}$</td><td>$\frac{X - X_{\text{н}}}{X - X_{\text{в}}} = S\frac{K - K_{\text{н}}}{K - K_{\text{в}}}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Решения уравнений измерения при коррекции систематической погрешности
с применением инварианта S</td></tr>
<tr><td>$X = \frac{X_{\text{в}} - X_{\text{н}}}{K_{\text{в}} - K_{\text{н}}}K$</td><td>$X = \frac{X_{\text{н}} - X_{\text{в}} S V_K}{1 - S V_K}$ $V_K = \frac{K - K_{\text{н}}}{K - K_{\text{в}}}$</td></tr>
</table>